Sada příkladů na implicitní funkce

1. Ukažte, že rovnice $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ určuje v jistém okolí bodu $(0, 1)$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.

2. Ukažte, že rovnice $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 0)$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte Taylorův polynom supně 2 této funkce se středem v bodě 1.

3. Ukažte, že rovnice $\sin(xy) + \cos(xy) = 1$ určuje v jistém okolí bodu $(\pi, 0)$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě π.

4. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 1, 1)$ implicitně zadanou funkci (proměnných x a y). Spočtěte gradient této funkce v bodě $(1, 1)$.

5. Ukažte, že rovnice $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}$ určuje v jistém okolí bodu $(0, 1, 1)$ implicitně zadanou funkci (proměnných x a y). Spočtěte gradient této funkce v bodě $(0, 1)$.

6. Ukažte, že soustava $xe^{u+v} + 2uv - 1 = 0$, $ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x = 0$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 2, 0, 0)$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (proměnných x a y). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(1, 2)$.

7. Ukažte, že soustava $x = u \cos \frac{v}{u}$, $y = u \sin \frac{v}{u}$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 0, 1, 0)$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (proměnných x a y). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(1, 0)$.

8. Ukažte, že soustava $x = e^u + u \sin v$, $y = e^u - u \cos v$ určuje v jistém okolí bodu $(e + 1, e, 1, \frac{\pi}{2})$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (proměnných x a y). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(e + 1, e)$.

9. Ukažte, že soustava $3 = xy^2 + xu + yv^2$, $2 = x^3y + 2xv - u^2v$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 1, 1, 1)$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (proměnných x a y). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(1, 1)$.

10. Ukažte, že soustava $u = \sin x + xy + e^z$, $v = \cos y + xe^{-y}$, $w = x^2 + 2y - \cos(xz)$ určuje v jistém okolí bodu $(1 + \sin 1, 2, 0, 1, 0, 0)$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ (proměnných u, v a w). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(1 + \sin 1, 2, 0)$.

Výsledky:

1. $\varphi'(0) = 2$, $\varphi''(0) = -14$.
2. $\varphi'(1) = -1$, $\varphi''(1) = 4$ (a $\varphi(1) = 0$) a tedy Taylorův polynom má tvar $-(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}$
3. $\varphi'(\pi) = 0$, $\varphi''(\pi) = 0$.
4. $\nabla z(1,1) = (-1,-1)$.
5. $\nabla z(0,1) = (1,1)$.
6. $J_\varphi(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
7. $J_\varphi(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
8. $J_\varphi(e+1,e) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+e} & 0 \\ -\frac{e}{1+e} & 1 \end{pmatrix}$.
9. $J_\varphi(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$.
10. $J_\varphi(1,2)0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2}(1-\cos 1) & -\frac{1}{4}(1+\cos 1) \end{pmatrix}$.